**КГУ «Общеобразовательная школа №2 села Балкашино отдела образования по Сандыктаускому району управления образования Акмолинской области»**

**Учебно-методическмй комплекс**

**по теме «Комплексные числа»**

**Алгебра и начала анализа**

**11 класс**

**Автор: Холопцева Галина Викторовна**

**Учитель математики, 1 категория**

**2021-2022 уч. год**

**Содержание**

1. Пояснительная записка.
2. История возникновения комплексных чисел.
3. Теоретический материал.
4. Методическая разработка урока.
5. Задачи для самостоятельного решения.
6. Дидактический материал.
7. Литература.

**Пояснительная записка**

Раздел «Комплексные числа» ввели в содержание программы в 2021 учебном году. Понятие числа является основным стержнем всего школьного курса математики, пронизывающим этот курс от первого до последнего класса. Изучение чисел идет последовательно - натуральные числа, целые числа, дроби, иррациональные, действительные. В школьном курсе математики этот вопрос оставался не завершённым. Так как при решении квадратных уравнений, если дискриминант отрицательный, то действительных корней не существует. Но если ввести множество комплексных чисел, то квадратное уравнение всегда будет иметь корни. И, конечно, только в старших классах уместен достаточно полный, систематизирующий взгляд на общую картину завершившегося эволюционного процесса. Знакомство с множеством комплексных чисел расширяет понятие о числе.

Актуальность данной темы заключается в вечном вопросе: нужно ли знать математику менеджеру, социологу, филологу и другим представителям гуманитарных профессий? А если нужно, то в какой мере? Вопросы далеко не праздные: на практике при решении многих конкретных управленческих проблем часто берут верх неформализуемые факторы, а применение математических методов сводится к использованию лишь четырех действий арифметики, а мнимые числа вообще не учитываются ни в каких расчетах.

Однако, по словам Леонардо да Винчи, "Никакое человеческое исследование не может называться настоящим знанием, если оно не прошло через математические доказательства". Поэтому математически грамотно при решении обычных квадратных уравнений, имеющих отрицательный дискриминант говорить и писать, что уравнение не имеет действительных корней. При этом учащиеся должны быть знакомы с мнимыми числами, и если требуется, то вычислить корни уравнения, являющиеся мнимыми числами. Знание расширяет наш кругозор, делает осмысленными наши действия, а в дальнейшей практической жизни - исследования.

В настоящее время комплексные числа используются в математике гораздо шире, чем действительные. С помощью комплексных чисел исследуется течение воды, полёт ракет и самолётов. Они применяются при вычерчивании географических карт, и многих других науках. Все это говорит об актуальности выбранной темы и ее значимости для курса алгебры и начал анализа.

**Цели и задачи раздела**

**Основная цель** – расширить множество действительных чисел для того, чтобы находить решения алгебраических уравнений и, в частности, квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом; научить представлять комплексное число в алгебраической форме, выполнять действия сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами; изображать комплексные числа точками плоскости, извлекать корни из комплексных чисел.

**Основные задачи** при изучении учебного материала темы:

**Образовательные:**

* формирование умений объяснять понятия комплексно-сопряженного числа, модуля комплексного числа;
* формирование умений представлять комплексное число в алгебраической форме;
* формирование умений и навыков выполнять операции сложения, вычитания, умножения и деления чисел, записанных в алгебраической форме;
* формирование умений и навыков возведение комплексного числа в степень и извлечения корня n-й степени из комплексного числа;
* формирование умений изображать комплексные числа на комплексной плоскости;
* формирование умений решения алгебраических уравнений и, в частности, квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом;

**Развивающие:**

* развивать умения обобщать изучаемые факты, делать выводы;
* развивать внимание, память, речь через решение творческих задач;
* развивать креативные и коммуникативные способности через применение коллективной работы на уроках.

**Воспитательные**

* формирование понимания того, что данная тема имеет важное практическое применения в физике и других областях науки и техники, где приходится оперировать величинами, которые можно представить в виде вектора;
* формирование у обучающихся навыков самоконтроля, самоанализа;
* формирование сознательной дисциплины и норм поведения учащихся
* обеспечить условия для воспитания положительного интереса к изучаемому предмету;
* способствовать формированию культуры умственного труда;
* умению критично соотносить начальный план работы с реальным процессом ее выполнения.

**Ожидаемые результаты**

В результате изучения раздела «Комплексные числа» учащиеся должны:

***знать (понимать):***

* понятия комплексные числа, действительная и мнимая части;
* арифметические действия над комплексными числами;
* понятие комплексно-сопряженные числа;
* понятие модуль комплексного числа;
* геометрическую интерпретацию комплексных чисел;
* термин аргумент комплексного числа;
* алгебраическую форму записи комплексных чисел;

***уметь:***

* уметь выполнять операции сложения, вычитания, умножения и деления чисел, записанных в алгебраической форме;
* представлять комплексное число в алгебраической форме;
* изображать число на комплексной плоскости;
* уметь возводить в натуральную степень;
* уметь решать квадратные уравнения с комплексными коэффициентами,
* уметь извлекать корень из комплексного числа.

**Календарно тематическое планирование**

Раздел «Комплексные числа» (14 часов)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 четверть | | |
| Комплексные числа | Мнимые числа. Определение комплексных чисел | 11.1.1.1 - знать определение комплексного числа и его модуля;  11.1.1.2 - уметь изображать комплексное число на комплексной плоскости;  11.1.1.3 - знать определение сопряженных комплексных чисел и их свойства; |
| Действия над комплексными числами в алгебраической форме | 11.1.2.1 - выполнять арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме;  11.1.2.2 - применять закономерность значения i*n* при возведении в целую степень комплексного числа в алгебраической форме;  11.1.2.3 - уметь извлекать квадратный корень из комплексного числа; |
| Комплексные корни квадратных уравнений | 11.1.2.4 - решать квадратные уравнения на множестве комплексных чисел; |
| Основная теорема алгебры | 11.1.2.5 - знать основную теорему алгебры и её следствия; |

**История возникновения комплексных чисел.**

В связи с развитием алгебры, математикам потребовалось ввести сверх прежде известных положительных и отрицательных чисел, числа нового рода. **Комплексные числа**.

Итальянский математик Кардано в середине 16-ого века для решения кубических уравнений ввел квадратные корни из отрицательных чисел. Квадратные корни из отрицательных чисел он назвал софистическими, т.е. мудреными.

Решения уравнений третьей степени по формулам Кардано исследовал итальянский математик Бомбелли. Он обнаружил некоторые свойства комплексных чисел.

Французский математик Декарт в 30-х годах 17-ого века ввел наименование **мнимые числа**, которое применяется по сей день.

В противоположность мнимым числам прежде известные числа (положительные и отрицательные, в том числе иррациональные) стали называть действительными или вещественными.

Сумма действительного и мнимого чисел и называется **комплексным числом**. Это термин впервые ввел немецкий математик и астроном Гаусс в 1831-ом году.

В 18-ом веке крупнейшие математики мира спорили о том, как находить логарифмы комплексных чисел. Хотя с помощью комплексных чисел удалось получить много важных фактов, относящихся к действительным числам, но само существование комплексных чисел многим казалось сомнительным.

В 1707-ом году Муавр открыл формулу Муавра для возведения в степень (и извлечения корней) комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Исчерпывающие правила действий с комплексными числами дал в середине 18-ого века русский академик Эйлер.

На рубеже 18 и 19 веков было указано Весселем (Дания) и Арганом (Франция) геометрическое изображение комплексных чисел. Но на работы Весселя и Аргана не обратили внимания, и лишь в 1831г., когда тот же способ был развит великим математиком Гауссом, он стал всеобщим достоянием.

Кардано  Бомбелли  Декарт

Муавр  Гаусс  Эйлер

# Теоретический материал

**Мнимая единица. Алгебраическая форма комплексных чисел.**

Неразрешимость уравнения *x*2 + 9 = 0 на множестве действительных чисел привела к введению так называемой **мнимой единицы** , т.е. мнимого (придуманного) числа, обладающего свойством: **.**

Тогда *x*2 + 9 = 0 имеет два решения: .

Числа, вида , где  ,  – мнимая единица, называют **мнимыми числами.**

Например, , , , , и т.п.

Числа, вида , где ,  – мнимая единица, называют **комплексными числами.**

Например, , , , , и т.п.

Форма записи  называется **алгебраической**.

 – действительная часть: Re(z)  – мнимая часть: Im(z)

Такая запись позволят записывать не только комплексные числа, но и *чисто мнимые* и *действительные*, например:

|  |  |
| --- | --- |
| **Действительные числа** | **Мнимые числа** |
|  |  |
|  |  |

Во множестве комплексных чисел нет понятий «больше», «меньше», «положительное», «отрицательное».

Числа  и  называются **равными**, если  и .

Числа  и  называются **противоположными.**

Числа  и  называются **сопряженными***.*

**Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом**

Решением квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом всегда будут два сопряженных комплексных числа.

Пример 1: решить квадратное уравнение .

Решение.

Вычислим дискриминант

.

Представляем отрицательное число как произведение (–1) и положительного числа и заменяем (–1) на  :

.

Найдем .

Находим корни уравнения:

 ;

.

Ответ: два сопряженных комплексных числа:  и .

**Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме**

**Сумма** 

**Разность** 

**Произведение** 

**Частное** 

(числитель и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю, чтобы избавиться от комплексного числа в знаменателе)

Рекомендуется для упрощения вычислений при делении, вывести формулу для умножения двух сопряжённых комплексных чисел:



Пример 2. Выполнить арифметические действия над комплексными числами  и .

Решение.

1) ;

2) ;

3) ;

4) .

Ответ**.** ; ; ; 

**Натуральная степень мнимой единицы *i***

Найдем первый четыре степени ***i***:

, ,  , .

Учитывая, что , найдем старшие степени:

, ,

, 

Очевидно, что все остальные степени ***i*** будут равны одному из предыдущих четырех значений.

**Чтобы возвести *i* в натуральную степень, надо показатель степени разделить на 4, и возвести *i* в степень, равную остатку от деления**.

Пример 3: Найти , , , .

Решение.

;

;

;

 .

Ответ. , , , .

**Геометрическая интерпретация комплексных чисел**

Плоскость называется **комплексной**, если каждому комплексному числу  ставится в соответствие точки плоскости с координатами , причем, это соответствие взаимно-однозначное (рис. 1).

Ось  называется **действительной** осью, т. к. на ней расположены точки, соответствующие числам, у которых .

Ось  называется **мнимой** осью, т. к. на ней расположены точки, соответствующие числам, у которых .

Таким образом, любое комплексное число  можно изобразить на плоскости точкой с координатами , причем взаимно однозначно.

С каждой точкой  комплексной плоскости связан *радиус-вектор* этой точки (рис. 1).

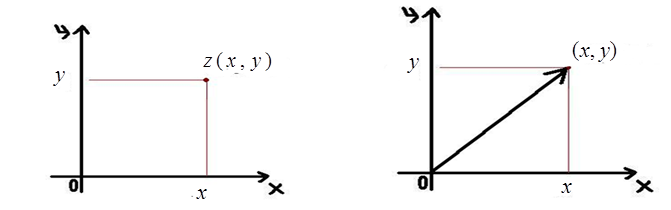


Рисунок 1

Сложение и вычитание комплексных чисел можно выполнить по правилу параллелограмма (правило сложения и вычитания векторов), которое заключается в следующем: нужно построить параллелограмм на векторах, полученных при геометрическом представлении этих чисел. Результату суммирования будет соответствовать вектор-диагональ этого параллелограмма. При выполнении вычитания нужно учитывать, что разность и будет соответствовать сумме  и . Т.е. .

Пример 4. Даны два комплексных числа:  и .

Изобразить их на комплексной плоскости и результаты их сложения и вычитания (рис. 2).

Решение.





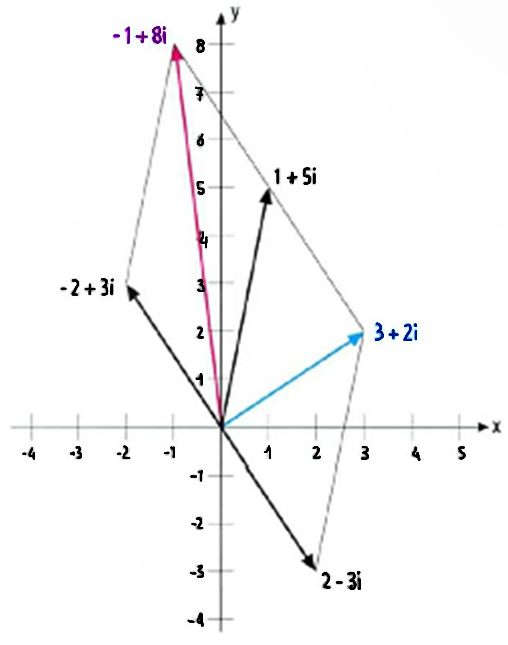


Рисунок 2

Длина  вектора, соответствующего комплексному числу  называется **модулем** комплексного числа  и обозначается .

Угол , образованный радиус-вектором с положительным направлением оси , называется **аргументом** комплексного числа  и обозначается  (рис. 3).

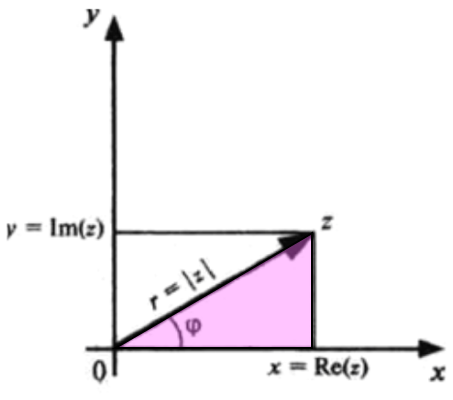


Рисунок 3

Рассматривая на рис. 3 выделенный прямоугольный треугольник, получаем соотношения: .

**Методическая разработка урока**

Краткосрочный план

ПРЕДМЕТ: Алгебра и начала анализа

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Раздел: | Комплексные числа | |
| ФИО педагога | Холопцева Г.В. | |
| Дата: |  | |
| Класс: 11 | Количество присутствующих: | Количество отсутствующих: |
| Тема урока: | Мнимые числа. Определение комплексных чисел | |
| Цели обучения в соответствии  с учебной программой: | 11.1.1.2 - уметь изображать комплексное число на комплексной плоскости; | |
| Цели урока: | Сформировать навыки геометрического изображения комплексного числа на комплексной плоскости; | |
| Критерии оценивания: | Учащийся изображает комплексное число на комплексной плоскости; | |

Ход урока

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Этап урока/ Время | Действия педагога | Действия ученика | Оценивание | Ресурсы |
| **Организационный**  **/ 2 мин** | Приветствует учащихся, проверяет готовность к уроку.  Организационный этап направлен на включение обучающихся в деловой ритм, настрой на эффективную работу, создание положительной атмосферы.  Называет тему урока. Четко формулирует цель и образовательные задачи урока | Приветствуют учителя. Определяют готовность к уроку (на столах находится необходимый к уроку материал, предметы).  Принимают участие в постановке темы (цели) урока. Осмысливают поставленную цель. |  | Презентация |
| Актуализация знаний/ 5 мин.  (включение учеников в мыслительную деятельность).  Работа в парах  Фронтальная работа | Приглашает учеников выступить с докладом о возникновении комплексных чисел.    Дает задание: на слайде предложены вопросы, на которые надо ответить в парах друг другу. Оказывает помощь и вносит коррективы в деятельность учащихся.    Задает вопросы.  - Найти сопряженное, противоположное, модуль числа к заданию 1.  - К заданиям 2-8 назовите множество точек комплексной плоскости удовлетворяющие данным условиям | Выступают несколько человек с исторической справкой о возникновении комплексных чисел (задание было дано желающим на предыдущем уроке)  Отвечают на вопросы друг другу; оценивают работу друг друга  Ответы учеников:  1) = 3 +4i, - Z = -3 + 4i, ==5  2) Уравнение окружности с центром в точке (0;0) и R=4.  3) Уравнение окружности с центром в точке (3;0) и R=2.  4) Уравнение окружности с центром в точке (0;1) и R=5.  5) Точки лежат вне круга с центром в точке(0;0) и R=2.  6) Точки лежат круга с центром в точке(0;2) и R=2.  7) Точки лежат внутри кольца, образованные двумя окружностями с центром в точке (-1;0) и R=1и R=7.  8) Точки лежат на серединном перпендикуляре к отрезку с концами (0;1) и (-2;0) . | ВЗО, СО | Презентация |
| Закрепление изученного материала/ 20 мин. | Организует усвоение учениками нового способа действий с проговариванием во внешней речи.  №16.8 №16.9 | Работают с учебником | ВЗО, СО |  |
| Формативное оценивание/ 10 мин. | Организует выполнение учащимися самостоятельной работы на новые знания и умения, самопроверку, выявление места и причины затруднений, работу над ошибками.  Определить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющее данному условию:  img7 | Выполняют задание  Окружность с центром (0,5; -1) и радиусом R=  **Решение.**  img8  img9  img10  9х2+9у2 = (х+4)2 + (у-8)2  9х2 – х2 – 8х – 16 + 9у2 – у2 + 16у – 64 =0  8х2 – 8х – 16 + 8у2 + 16у – 64 =0  х2 – х – 2 + у2 + 2у – 8 =0  img11  (х – 0,5)2 + (у + 1)2 = 11,25 | СО |  |
| Домашнее задание/ 1 мин. | Дает разъяснение по домашнему заданию.  п16 №16.13 | Записывают домашнее задание. |  |  |
| Рефлексия/ 2 мин. | Предлагает оценить свою работу на уроке по 10 балльной системе, последовательно отвечая на вопросы:   1. Как я усвоил материал?  * получил прочные знания (9 – 10 баллов); * усвоил материал частично (7—8 баллов); * мало понял, необходимо еще поработать (4—6 баллов).  1. Как я работал?  * работал хорошо (9 – 10 баллов); * допустил ошибки (7 – 8 баллов); * не справился со многими заданиями (указать какими) (4 – 6 баллов).  1. Как работала учебная пара?  * дружно все (9 – 10 баллов); * не все активны (7—8 баллов); * работа вялая, много ошибок (4 – 6 баллов) | Анализируют работу на уроке, сравнивают итоги урока с поставленными задачами, определяют пробелы в своих знаниях. | СО | Презентация |

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Решить уравнение:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) |  | 2) |  |
| 3) |  | 4) |  |
| 5) |  | 6) |  |
| 7) |  | 8) |  |
| 9) |  | 10) |  |

**2.** Даны два комплексных числа  и .

Найти , , , 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1) |  | 2) |  | 3) |  |
| 4) |  | 5) |  | 6) |  |
| 7) |  | 8) |  | 9) |  |

**3.** Выполнить действия:

1)  2)  3) 

**4.** Вычислить:

1)  2) 3) 4) 5) 6) 7) 8)

9)  10) 

11)  12) 

13) 14) 

**5.** Изобразите на комплексной плоскости числа

1)  2)  3)  4) 

**6.** Задано комплексное число . Найти .

1)  2)  3)  4) 

**Дидактический материал**

**Тест№1**

**Цель:** проверить знание определения комплексного числа, сопряженных чисел, умения находить действительную и мнимую части комплексного числа.

Прочитайте каждое утверждение, если вы с ним согласны то в колонке ответов поставьте «+», если же вы не согласны с данным утверждением, поставьте « – » в колонке ответов.

**Вариант 1**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №п/п | Утверждения: | Ответ. |
| 1 | Числоhttp://festival.1september.ru/articles/597925/img2.gif является комплексным. |  |
| 2 | Число а, такое что а2 = – 2 является действительным. |  |
| 3 | Число а, такое что а4 = 1 является действительным. |  |
| 4 | 0 – комплексное число. |  |
| 5 | Число 3i является чисто мнимым. |  |
| 6 | Действительная и мнимая части комплексного числа 3 – 2i соответственно равны 3 и 2. |  |
| 7 | Действительная и мнимая части сопряженных чисел отличаются только знаками. |  |
| 8 | Сопряженным для действительного числа является само это число. |  |
| 9 | Еслиhttp://festival.1september.ru/articles/597925/img4.gif, то действительная часть числа z равна 0. |  |

**Вариант 2**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №п/п | Утверждения: | Ответ. |
| 1 | Число 5 является комплексным. |  |
| 2 | Число а, такое что а2 = 4 является действительным. |  |
| 3 | Число а, такое что а8 = 1 является действительным. |  |
| 4 | 0 – мнимое число. |  |
| 5 | Если а + bi является действительным, то b = 0 |  |
| 6 | Действительная и мнимая части комплексного числа – 3 + 2i соответственно равны – 3 и 2. |  |
| 7 | Мнимые части сопряженных чисел отличаются только знаками. |  |
| 8 | Еслиhttp://festival.1september.ru/articles/597925/img6.gif, то мнимая часть числа z равна 0. |  |
| 9 | http://festival.1september.ru/articles/597925/img8.gif. |  |

**Самостоятельная работа №1**

**Цель:** проверить умение применять правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел, определения равенства комплексных чисел, записанных в алгебраической форме.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| 1 | Даны числа: http://festival.1september.ru/articles/597925/img10.gif.  Найдите:  a) http://festival.1september.ru/articles/597925/img12.gif b) http://festival.1september.ru/articles/597925/img14.gif c) http://festival.1september.ru/articles/597925/img16.gif d) http://festival.1september.ru/articles/597925/img18.gif e) http://festival.1september.ru/articles/597925/img20.gif | Даны числа: http://festival.1september.ru/articles/597925/img22.gif.  Найдите:  a) http://festival.1september.ru/articles/597925/img12.gif b) http://festival.1september.ru/articles/597925/img14.gif c) http://festival.1september.ru/articles/597925/img16.gif d) http://festival.1september.ru/articles/597925/img18.gif e) http://festival.1september.ru/articles/597925/img20.gif | Даны числа: http://festival.1september.ru/articles/597925/img24.gif.  Найдите:  a) http://festival.1september.ru/articles/597925/img12.gif b) http://festival.1september.ru/articles/597925/img14.gif c) http://festival.1september.ru/articles/597925/img16.gif d) http://festival.1september.ru/articles/597925/img18.gif e)  http://festival.1september.ru/articles/597925/img20.gif |
| 2 | Для чисел http://festival.1september.ru/articles/597925/img10.gifнайдите действительные числа а и b, для которых верно равенство http://festival.1september.ru/articles/597925/img26.gif. | Для чиселhttp://festival.1september.ru/articles/597925/img28.gif найдите действительные числа а и b, для которых верно равенство http://festival.1september.ru/articles/597925/img26.gif. | Для чисел http://festival.1september.ru/articles/597925/img24.gifнайдите действительные числа а и b, для которых верно равенство http://festival.1september.ru/articles/597925/img26.gif. |
| 3 | Запишите z в алгебраической форме:  http://festival.1september.ru/articles/597925/img30.gif | Запишите z в алгебраической форме:  http://festival.1september.ru/articles/597925/img32.gif | Запишите z в алгебраической форме:  http://festival.1september.ru/articles/597925/img34.gif |

**Тест №2**

**Цель:** проверить умение применять геометрическую интерпретацию модуля.

Задание: Сопоставьте друг другу условие на комплексное число z и соответствующее ему множество точек координатной плоскости.

**Вариант №1**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А | http://festival.1september.ru/articles/597925/img36.gif | 1 | Круг с центром (1; 0) и радиусом 3 |
| Б | http://festival.1september.ru/articles/597925/img38.gif | 2 | Часть плоскости вне круга с  центром (0; 0) и радиусом 3 |
| В | http://festival.1september.ru/articles/597925/img40.gif | 3 | Прямая х = 0 |
| Г | http://festival.1september.ru/articles/597925/img42.gif | 4 | Круг с центром (0; 0) и радиусом 3 |
| Д | http://festival.1september.ru/articles/597925/img44.gif | 5 | Круг с центром (0; 1) и радиусом 3 |
|  |  | 6 | Окружность с  центром (0; 0) и радиусом 3 |

**Вариант №2**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А | http://festival.1september.ru/articles/597925/img46.gif | 1 | Часть плоскости вне круга с  центром (0;0) и радиусом 3, включая границу. |
| Б | http://festival.1september.ru/articles/597925/img48.gif | 2 | Прямая у = – х |
| В | http://festival.1september.ru/articles/597925/img50.gif | 3 | Окружность с центром (0; – 2) и радиусом 3 |
| Г | http://festival.1september.ru/articles/597925/img52.gif | 4 | Круг с центром (2; – 1) и радиусом 3 |
| Д | http://festival.1september.ru/articles/597925/img54.gif | 5 | Круг с центром (0;2) и радиусом 3 |
|  |  | 6 | Окружность с  центром (0; 0) и радиусом 3 |

**Самостоятельная работа №2**

**Цель:** проверить умение применять определение мнимой единицы при разложении на множители с помощью формул сокращенного умножения, атак же умения решать квадратные уравнения с действительными коэффициентами.

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1** | **Вариант 2** |
| 1. Разложите на линейные множители:  a) http://festival.1september.ru/articles/597925/img103.gif b) http://festival.1september.ru/articles/597925/img105.gif c) http://festival.1september.ru/articles/597925/img107.gif d) http://festival.1september.ru/articles/597925/img109.gif e) http://festival.1september.ru/articles/597925/img111.gif | 1. Разложите на линейные множители:  a) http://festival.1september.ru/articles/597925/img113.gif b) http://festival.1september.ru/articles/597925/img115.gif c) http://festival.1september.ru/articles/597925/img117.gif d) http://festival.1september.ru/articles/597925/img119.gif e) http://festival.1september.ru/articles/597925/img121.gif |
| 2. Решите уравнение:  a) http://festival.1september.ru/articles/597925/img123.gif b) http://festival.1september.ru/articles/597925/img125.gif с) http://festival.1september.ru/articles/597925/img127.gif | 2. Решите уравнение:  a) http://festival.1september.ru/articles/597925/img129.gif b) http://festival.1september.ru/articles/597925/img131.gif c) http://festival.1september.ru/articles/597925/img133.gif |

**Самостоятельная работа №3**

**Цель:**  проверить умение изображать комплексные числа в комплексной плоскости.

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1** | **Вариант 2** |
| Построить на комплексной плоскости следующие комплексные числа:  Z1=5+6i;  Z2= -2i+6;  Z3= i+1;  Z4= -3-2i;  Z5= -i-0;  Z6= 6;  Z7= 7i+3;  Z8= 2i;  Z9= -6i-2;  Z10= ; | Построить на комплексной плоскости следующие комплексные числа:  Z1= -2+3i;  Z2= 5i-1;  Z3= -2i;  Z4= -8-3i;  Z5= -i+0;  Z6= 4;  Z7= 2i+9;  Z8= 7i;  Z9= -4i-6;  Z10= ; |

**Проверочная работа №1.**

**1 вариант**

**Задание 1**. Даны комплексные числа *z*1 = 2 + 3*i*, *z*2 = 5 – 7*i* . Найдите:  
а)*z*1 + *z*2;    б) *z*1 – *z*2;    в) *z*1*z*2; г)

**Замечание**. При выполнении умножения можно использовать формулы:

(*a ±* *b*)2 = *a*2 ± 2*ab* + *b*2,  
(*a* ± *b*)3 = *a*3 ± 3*a*2*b* + 3*ab* ± *b*3.

**Задание 2.** Выполните действия:

а) (2 + 3*i*)2;    б) (3 – 5*i*)2;    в) (5 + 3*i*)3.

г) (5 + 3*i*)(5 – 3*i*);  д) (2 + 5*i*)(2 – 5*i*); е) (1 + *i*)(1 – *i*).

**Задание 3.** Выполнить деление:

а) ; б) ; г) ; д) ;

**Задание 4.** Выполните действия:

а) (3 + 2*i*)(3 – 2*i*);  б); ; в) .

**Проверочная работа №1.**

**2 вариант**

**Задание 1**. Даны комплексные числа *z*1 = 5 - 4*i*, *z*2 = 1+3*i* . Найдите:  
а)*z*1 + *z*2;    б) *z*1 – *z*2;    в) *z*1*z*2; г)

**Задание 2.** Выполните действия:

а) (4 + 6*i*)2;    б) (2 – *i*)2;    в) (4 + 3*i*)3.

**Задание 3.** Выполнить деление:

а) ; б) ; г) .

**Задание 4.** Выполните действия:

а) ; в) .

**Проверочная работа №2.**

**1 вариант**

**Задание 1.** Даны комплексные числа найти модуль и аргумент.

а) z1 = 2 + 3i;    б) z2 = 3 – 5i;    в) z3 =5 + 3i; г) z4 =2 + 5i; д) z5 = – 5; е) z6 =1.

И проверьте следующие неравенства

http://festival.1september.ru/articles/597925/img70.gif

**Задание 2.** Дано z1 = -3 +4i, z2 = 2+4i, z3 = -1-2i. Вычислите чему равны модули и аргументы чисел:

а) z1 +z2 ; б) z1 - z2 + z3; в)z1 \*z2 + z3; г)z3+ z2 - z3.

**Задание3.** Представьте комплексные числа в тригонометрической форме:

а) z= 5-2i; б) z= -2-2i; в) z=1-; г) z=; д) z=+i.

**Проверочная работа №2.**

**2 вариант**

**Задание 1.** Даны комплексные числа найти модуль и аргумент.

а) z1 = -1 + 4i;    б) z2 = 6 – 2i;    в) z3 =7 + 10i; г) z4 = + 2i; д) z5 = – 5;

И проверьте следующие неравенства

http://festival.1september.ru/articles/597925/img70.gif

**Задание 2.** Дано z1 = -2 +6i, z2 = 3- 4i, z3 = 5-i. Вычислите чему равны модули и аргументы чисел:

а) z1 +z2 ; б) z1 - z2 + z3; в)z1 \*z2 + z3; г)z3+ z2 - z3.

**Задание3.** Представьте комплексные числа в тригонометрической форме:

а) z= -i; б) z= 4+4i; в) z=1+. .

**Проверочная работа №3.**

**1 вариант**

**Задание 1.**

На комплексной плоскости постройте точки:

а) z= 4-2i; б) z= -2-9i; в)z= 5; г) z= -8i; д) z= 5+4i.

**Задание 2.**

Найдите комплексно-сопряженные числа для следующих чисел и постройте их на комплексной плоскости:

а) z= -2+6i; б) z= 7+3i; в) z= 2i-3; г)z= 2i; д) z= -5i+10; е) z= i+1.

**Задание 3.**

Изобразите комплексные числа точками плоскости, соедините их попарно и получите фигуру: 4i, -4+2i, -4-2i, -4i, 4-2i, 4+2i, 4i.

**Проверочная работа №3.**

**2 вариант**

**Задание 1.**

На комплексной плоскости постройте точки:

а) z= 4+2i; б) z= 2-9i; в)z= 5i; г) z= -i; д) z= -5-4i.

**Задание 2.**

Найдите комплексно-сопряженные числа для следующих чисел и постройте их на комплексной плоскости:

а) z= -2-6i; б) z= -7+3i; в) z= -2i+3; г)z= 3i; д) z= -6i+11; е) z= i-3.

**Задание 3.**

Изобразите комплексные числа точками плоскости, соедините их попарно и получите фигуру: 3i, -4+i, -4-3i, -5i, 4-3i, 4+i, 3i.

**Проверочная работа**

**Задание 1.** Данные  комплексные  числа  изобразите  точками плоскости:

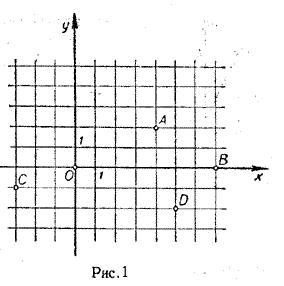
а)   1 + ***i***;           в) —2 + 3***i***;         д) 5+ 0***i***;            ж) 0 + 5***i***

б)  1 — ***i***;           г) —3 — 2***i***;         е) —6 + 0***i***;         з) 0 — 4***i***.

**Задание 2.**  Пусть точка М служит изображением на плоскости комплексного числа ***а + bi***.  Построить на той же плоскости точки, которые изображали бы комплексные числа:

a) ***а — bi***;           б) 0 + ***bi***; в)  — ***а + bi***;      г) — ***а*** + 0***i***; д)  — ***а — bi;***     е) 0 — ***bi***;

ж)  ***а*** + 0***i***.

**Задание 3.**   Какие комплексные числа изображают   на рисунке 1 точки А, В, C,D и О?

**Задание 4.** Пусть точка М служит изображением на плоскости комплексного числа ***а — bi***. Где на той же плоскости расположены точки, изображающие числа:

а)  3***а*** + 0***i*** ;         б) 0 + 2***bi; в***)  — 5***а*** + 0***i***;    г) 4***а*** + 3***bi*** ; д) 0 — ***bi***.

**Проверочная работа по теме:**

**«Комплексные числа и действия над ними».**

**1 Вариант.**

**№1.** Найти сумму, разность, произведение и частное *z1*и *z2*:

а) *z1*= 24 – 7*i*,  *z2*= 8 + 16*i*;

б) *z1*= 16*i*, *z2*= 4 – 3*i*.

**№2.** Вычислить:

а) ;

б) (4 + 3*i*)(3 – 4*i*) – (4 – 3*i*)(3 + 4*i*);

в) + .

**№3.** Решить уравнение:

а) 4*x*2 + 12*x* + 25 = 0;

б) *x*2 + 10*x* + 50 = 0;

в) *x*2 + 2*x* + 8 = 0.

**Проверочная работа по теме:**

**«Комплексные числа и действия над ними».**

**2 Вариант.**

**№1.** Найти сумму, разность, произведение и частное *z1* и *z2*:

а) *z1*= 16 + 8*i*, *z2*= 32 – 2*i*;

б) *z1*= 15*i*, *z2*= 3 + 2*i*.

**№2.** Вычислить:

а) ;

б) (2 + 4*i*)(4 – 2*i*) – (2 – 4*i*)(4 + 2*i*);

в) + .

**№3.** Решить уравнение:

а) 9*x*2 + 12*x* + 29 = 0;

б) *x*2 - 2*x* + 2 = 0;

в) *x*2 + 2*x* + 15 = 0.

**Литература**

1. А.Е.Абылкасымова, В.Е.Корчевский, З.А.Жумагулов Учебник «Алгебра и начала анализа» 11 класс
2. Нахман А.Д. Комплексные числа и элементарные функции комплексного переменного: Метод. пособие.- Тамбов, ТОПКРИО, 2007.43 с.
3. Богомолов Н.В. Математика: учеб.для ссузов.-М.:Дрофа, 2012.
4. Богомолов Н.В Практические задания по математике: учеб. пособие.-М.: Высш. Шк., 2009.
5. Апанасов П.Т., Орлов М.Н. Сборник задач по математике, М.: Высшая школа, 1987
6. Дадаян, А.А Сборник задач по математике – М.: Форум: Инфра- М, 2007.