Иррациональные уравнения.

Уравнение типа $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рассматриваются для того , чтобы обратить внимание на то, что при решении таких уравнений нет необходимости находить их ОДЗ тогда как неотрицательность правой части уравнений проверять нужно обязательно. Кроме того рассмотрим способы решения простейшего вида этих уравнений $\sqrt{ax+b} = cx+d$. Покажем откуда берутся посторонние корни. Для уравнений вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ покажем, что при их решении нет необходимости решать систему неравенств (ОДЗ) $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$, а достаточно подставить найденные корни уравнения f(x)=g(x) в одно из них.

1. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

При решении уравнения этого вида очень многие учащиеся прежде всего находят ОДЗ: f(x)≥ 0, затем решают получившееся квадратное уравнение , проверяют, после нахождения решений , условие f(x)≥ 0 и успокаиваются. Ответ может оказаться неверным. Почему? Потому что могут появиться посторонние корни. Почему? Потому что после возведения в квадрат решаются сразу два уравнения: $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt{f(x)} = -g(x)$но на разных промежутках числовой оси : $\sqrt{f(x)} = g(x)$ – там, где g(x)≥ 0, и

$\sqrt{f(x)} = -g(x) -$ там, где g(x)≤ 0. Посторонние корни – это корни второго уравнения, геометрически это пересечение графика функции y=g(x) с графиком функции $y = -\sqrt{f(x)}$. Как быть?

Дело в том, что обе части **любого** уравнения всегда можно возвести в квадрат , но при этом может получиться неравносильное уравнение, а, значит, могут появиться посторонние корни. В нашем случае получится $f(x) = g^2(x)$, при этом очень важно, что ОДЗ уравнения выполняется автоматически – поэтому при таком способе решение не надо тратить энергию на решение неравенства $f(x) \geq 0$:

Заметим, что уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ может иметь решение для g(x)≥ 0 , но не иметь решений, если g(x)≤ 0.

Вспомним, что, если $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, то $f(x) = g(x) \leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$.

Так как уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ может иметь решение лишь при условии g(x)≥ 0 (т.е. обе части в ОДЗ уравнения неотрицательны), то

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{f(x) = g^2(x)} \\ \mathrm{g(x) \geq 0} \end{cases}$$

Это очень важное условие равносильности.

Во-первых, оно освобождает учащегося от необходимости исследовать, а после нахождения решений проверить условие $f(x) \geq 0$ - неотрицательности подкоренного выражения, т.к. это условие выполняется автоматически.

Во-вторых, акцентирует внимание на проверке условия $g(x) \geq 0$ – **неотрицательности правой** части – это условие «отсекает» посторонние корни – корни уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$. При этом сначала решается уравнение , а затем найденные корни подставляются в неравенство. Неравенство (за редким исключением, когда корни «плохие») заранее решать не надо.

Наше условие равносильности особенно полезно при решении тригонометрических уравнений, в которых нахождение ОДЗ связано с решением тригонометрических неравенств, что гораздо сложнее, чем решение тригонометрических уравнений. Проверку в тригонометрических уравнениях даже условия $g(x) \geq 0$ не всегда просто сделать.

Замечание. При решении любых уравнений , где есть хотя бы один неравносильный переход, надо делать проверку, подставляя найденные корни.

Пример 1. $\sqrt{2x^3+2x^2-3x+3}=x+1$

В этом примере особенно хорошо видно, что важным при решении является условие $x+1 \geq 0$, а ОДЗ корня искать не надо, да и найти трудно.

. $\sqrt{2x^3+2x^2-3x+3}=x+1 \leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^3+2x^2-3x+3=x^2+2x+1 \end{cases} \leftrightarrow$
$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^3+x^2-5x+2=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases}$

Сумма коэффициентов уравнения $2x^3+x^2-5x+2=0$ значит, $x=1$ является корнем. Теперь можно выделить множитель (x-1) делением углом, при помощи схемы Горнера или группировкой, выделяя последовательно слагаемые, которые делятся на (x-1).

$2(x^3-1)+(x^2-1)-5(x-1)=0 \leftrightarrow (x-1)(2(x^2+x+1)+x+1-5)=0 \leftrightarrow$
$(x-1)(2x^2+3x-2)=0 \leftrightarrow (x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \leftrightarrow x=\left[\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right.$.

Любопытно, что $x=-2$ принадлежит ОДЗ корня $(-16+8+6+3>0)$, но не является решением, т.к. для него не выполнено условие $x+1 \geq 0$.

Ответ: 0,5: 1.

Пример 2. Решим уравнение

$4\sqrt{5x-x^2-6}=x-1$

Решение:

$4\sqrt{5x-x^2-6}=x-1 \leftrightarrow \begin{cases} 16(5x-x^2-6)=(x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 17x^2-82x+97=0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow$

$x=\frac{41 \pm \sqrt{212}}{17}$.

Ответ: $\frac{41 \pm \sqrt{212}}{17}$.

В этом примере не оказалось лишних корней.

Пример 3. Решите уравнение

$\sqrt{x^2-5x+13}=x+2$.

Решение:

$\sqrt{x^2-5x+13}$=x+2 $\leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^2-5x+13=(x+2)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^3-x^2-9x+9=0 \end{cases} \leftrightarrow$
$\begin{cases} x\ge -2 \\ (x-1)(x-3)(x+3)=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=3. \end{cases}$

Ответ: 1; 3.

Пример 4.

Решите уравнение

$\sqrt{7-cosx-6cos2x}$=4sinx

Решение:

$\sqrt{7-cosx-6cos2x}$=4sinx $\leftrightarrow \begin{cases} sinx\ge 0 \\ 7-cosx-6cos2x=16sin^2x \end{cases} \leftrightarrow$
$\begin{cases} sinx\ge 0 \\ 4cos^2x-cosx-3=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} sinx\ge 0 \\ \left[\left[cosx=\left[\left[\begin{matrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{matrix}\right.\right.\right.\right. \end{cases} \leftrightarrow \left[\left[\begin{matrix} cosx=1\leftrightarrow x=2\pi k \\ \begin{cases} cosx=-\frac{3}{4} \leftrightarrow x=\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi k \\ sinx\ge 0 \end{cases} \end{matrix}\right.\right.$.

Ответ: $2\pi k$; $arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi k,\ k\in Z.$

2. **Уравнение вида $\boldsymbol{\sqrt{ax+b}=cx+d}$.**

Его можно решать различными способами.

1. Можно воспользоваться приведенным выше условием равносильности:

   $\sqrt{ax+b}=cx+d \quad \leftrightarrow \begin{cases} cx+d\ge 0 \\ ax+b=(cx+d)^2 \end{cases}$.

2. Можно сразу решить уравнение $ax+b=(cx+d)^2$ (ОДЗ уравнения выполняется автоматически), а затем сделать проверку: подставить найденные решения в заданное уравнение $\sqrt{ax+b}=cx+d$.
3. Уравнение вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$. можно также решать с помощью замены переменных , положив t=$\sqrt{ax+b}$, $t\ge 0$

Тогда ax+b=t^2 , и ОДЗ уравнения выполняется автоматически. При этом $ax+b=t^2 \quad \leftrightarrow \quad x=\frac{t^2-b}{a}$ и уравнение (1) в новых переменных примет вид $t=\frac{c(t^2-b)}{a}+d \quad \leftrightarrow \quad ct^2-at-bc+ad=0.$

Задача свелась к нахождению неотрицательных решений квадратного уравнения $ct^2-at-bc+ad=0,$ что под силу любому учащемуся.

Пример 5. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8}=-ax+3a+2$ имеет единственное решение.

Решение: Решим задачу третьим способом. Пусть $\sqrt{x-8}=t,\ t\ge,$ тогда $x=t^2+8$ и уравнение примет вид $at^2+t+5a-2=0.$ Теперь задача состоит в том, чтобы найти все а, при которых уравнение $at^2+t+5a-2=0$ имеет единственное неотрицательное решение. Это имеет место в следующих случаях.

1. a=0, t=2 .
2. a$\neq 0, D = 1 - 20a^2 + 8 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{10} \rightarrow t=5 \\ a=\frac{1}{2} \rightarrow t=-1 \end{array}\right. \rightarrow$

одно неотрицаетельное решение при $a = -\frac{1}{10}$.

3. $a \neq 0,\ D > 0 \quad \leftrightarrow \quad a \in \left(-\frac{1}{10}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$,

$$t_1 t_2 = \frac{5a-2}{a} \leq 0 \quad \leftrightarrow \quad a \in \left(0; \frac{2}{5}\right]$$

$\rightarrow$ имеем единственное неотрицательное решение при $a \in \left(0; \frac{2}{5}\right]$.

Итак, имеем Ответ: $\left\{-\frac{1}{10}\right\} \cup \left[0;\ \frac{2}{5}\right]$.

3.Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Пусть задано уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Запишем ОДЗ: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$, но решать неравенства (за редким исключением) не надо. В ОДЗ обе части неотрицательны, и возведение в квадрат дает равносильное уравнение. Поэтому $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \quad \leftrightarrow$ f(x)=g(x) в ОДЗ

Теперь видно, что для всех решений f(x) и g(x) имеют одинаковые знаки, поэтому при таком способе решения нет необходимости проверять неотрицательность обеих функций – достаточно проверить неотрицательность одной из них: выбирают ту, для которой неравенство проще проверить. Можно записать полное условие равносильности, которое включает в себя ОДЗ уравнения:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Выбирают ту систему, в которой неравенство проще (решать его не надо).

Пример 6. Решите уравнение

$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^4 - 4x^2 + x + 7}$

Решение:

Видно, что подкоренное выражение в левой части намного проще, чем в правой , поэтому запишем так полное условие равносильности:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^4 - 4x^2 + x + 7} \quad \leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \quad \leftrightarrow \quad x \in R, \\ x^2 + x + 1 = x^4 - 4x^2 + x + 7 \quad \leftrightarrow \quad x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2=3 \\ x^2=2 \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{3}$.