**Мақала авторы:** М.Х.Дулати атындағы Тараз университетінің математика мұғалімдерін даярлау мамандығының 4 курс студенті – **Нұртай Қаламқас**

**Логарифмдік теңдеулер және оларды шешу тәсілдері**

**Кілт сөздер:** логарифм, теңдеу, дәреже, ондық логарифм, натурал логарифм.

Логарифмді ойлап табу – есептеу техникасының үлкен жетістігі. Күрделі тригонометриялық кестелермен жұмыс істеуді жеңілдету мақсатында XVI ғасырдағы кейбір математиктер арифметикалық және геометриялық прогрессияларды салыстырумен айналысты. Осы бағытта үлкен жетістікке қол жеткізген шотланд математигі Джон Непер (John Napier). Ол логарифмдерді кірістірмелі шама ретінде анықтады, яғни екі санның көбейтіндісін қосу арқылы табуға мүмкіндік беретін операцияны әзірледі.

Джон Непер XVI-XVII ғасырларда математикалық есептеулерді жеңілдету мақсатында логарифмдер кестесін жасап шығарды. Бұл кестелер математиктердің есептеулерін жылдамдатты, әсіресе астрономиялық және навигациялық есептеулерде. Содан кейін, 1617 жылы Непердің идеяларын әрі қарай дамытқан швейцариялық математик Генри Ферма (Henry Briggs) логарифмдердің ондық формада (ондық логарифмдер) кестесін шығарды. Логарим белгісінің алғашқы нұсқасы log белгілеуін 1624 жылы неміс астраномы Иоганн Кеплер.

Логарифмдер математиканың түрлі салаларында, соның ішінде дифференциалдық теңдеулер, статистика, және экономикада да маңызды рөл атқарады. Олар, әсіресе, күрделі есептеулерді орындау кезінде маңызды, себебі логарифмдер қолданысымен есептеулерді жеңілдету, мысалы, көбейту мен бөлуді қосу мен азайту арқылы ауыстыру мүмкіндігіне ие.

$a^{x}=b $**,** мұндағы$b\ne a^{n}$көрсеткіштік теңдеуін шешу тәсілін беру үшін жаңа ұғым – *логарифм* ұғымы қарастырылады. **Логарифм** (грекше logos — қатынас және arіthmos — сан).

Логарифм белгіленуі: log.

Логарифмнің жалпы түрі: Logab, мұндағы а – логарифмнің негізі, b – логарифм таңбасының ішіндегі өрнек.

Логарифмнің жалпы түрінің оқылуы: негізі a болатын b санының логарифмі.

**Анықтама.** Негізі а болатын b санының *логарифмі* деп b санына тең болатын негіздің дәреже көрсеткішін айтамыз.

$$log\_{a}b=u, a>0,a\ne 1, b>0, яғни a^{u}=b>0.$$

Логарифм түрлері: ондық lg және ln натурал логарифм жайлы да айтуға болады. Негізі 10 болғанда *log10* *N=lgN* - ондық логарифм деп аталады. е болғанда *loge* *M=lgM* - натурал логарифм деп аталады.

**Логарифмдердің негізгі қасиеттері.** Енді логарифмдердің негізгі қасиеттерін атап өтелік.

Кез келген $a>0, \left(a\ne 1\right) және b, c оң сандары үшін: $

$1^{°}. log\_{a}1=0;$ $5^{°}. log\_{a}b^{m}=mlog\_{a}b, mϵR;$

$2^{°}. log\_{a}a=1;$ $6^{°}. log\_{a^{n}}b=\frac{1}{n}log\_{a}b, nϵR, n\ne 0;$

$3^{°}. log\_{a}\left(b∙c\right)=log\_{a}b+log\_{a}c;$ $7^{°}. log\_{a}b=log\_{a}c\leftrightarrow b=c;$

$4^{°}. log\_{a}\frac{b}{c}=log\_{a}b-log\_{a}$ $8^{°}. log\_{a}b=\frac{log\_{c}b}{log\_{c}a}, c\ne 1$ теңдіктері орындалады.

**Логарифмдік теңдеу.**

**Анықтама.** Логарифм белгісі астында немесе (және) оның негізінде белгісізді қамтитын теңдеу логарифмдік теңдеу деп аталады. Қарапайым логарифмдік теңдеу деп logax=b түріндегі теңдеуді атаймыз. Егер a > 0, a ≠1 теңдеу кез келген нақты b кезінде x = ab деген бір ғана шешімі болады.

**Логарифмдік теңдеуді шешудің тәсілдері.**

**1**.*Логарифмнің анықтамасын қолдану арқылы шығарылатын теңдеулер(бірдей негізге келтіру әдісі).*

Логарифмнің анықтамасы бойынша:

logax=b түріндегі теңдеулер былай шешіледі.

logax=b⟺x=ab

**2**. *Потенциалдау әдісі.*

Логарифмдік теңдеуді logaƒ(x) = logag(x) түріне келтіру. Потенциалдау әдісін қолдану үшін логарифмдік теңдеуді $log\_{a}f\left(x\right)=log\_{a}g\left(x\right)$ түріне келтіру

**3**. *Жаңа айнымалы енгізу тәсілі.*

Логарифмдік теңдеулерді жаңа белгіні қолданып, шешуге болады. Бастапқы теңдеуге жаңа белгіні қойғаннан кейін, жаңа, барынша қарапайым теңдеу аламыз, оны шешкеннен кейін, алмастыруға қайта оралып, бастапқы теңдеудің түбірлерін табамыз.

**4**. *Мүшелеп логарифмдеу тәсілі.*

Берілген әдіс потенцирлеу әдісіне “кері” болып келеді, яғни логарифмдері жоқ теңдеулерден оларды қамтитын теңдеулерге көшеміз.

ƒ(x) = g(x)

Бұл әдіс әдетте егер теңдеуде көрсеткіштік функциялар болса қолданылады, логарифмдер көрсеткіште.

**5**. *Бір негізден екінші негізге көшу.*

Егер теңдеуде әртүрлі негізді логарифмдер болса, онда ең алдымен ауысу формуласын қолданып, барлық логарифмдерді бір негізге келтіру қажет.

 Логарифмдік теңдеулерді шешудің осы тәсілдерін қолданып, мысал қарастырайық.

**1-****мысал.** $log\_{\frac{1}{4}}x=log\_{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$

Шешуі: $log\_{2^{-2}}x=log\_{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$ анықталу облысы: $x>0, x\in (0;+\infty )$.

$$-\frac{1}{2}log\_{2}x=log\_{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$log\_{2}\frac{1}{\sqrt{x}}=log\_{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{2}$$

$$x=2$$

Жауабы: 2.

**2- мысал.** $ln\left(6-3x\right)-ln3=ln\left(2x-5\right)$

Шешуі: $ln\left(6-3x\right)-ln3=ln\left(2x-5\right)$

Анықталу облысын табамыз: $\left\{\begin{array}{c}6-3x>0,\\2x-5>0;\end{array}\right.\rightarrow \left\{\begin{array}{c}-3x>-6,\\2x>5;\end{array}\rightarrow \left\{\begin{array}{c}x<2;\\x>2,5.\end{array}\right.\right.$

Логарифм қасиеті бойынша, негіздері бірдей логарифмдерді:

$$ln\frac{6-3x}{3}=ln\left(2x-5\right)$$

$$ln\left(2-x\right)=ln\left(2x-5\right);$$

екі жақ негіздері бірдей болғандықтан логарифмды алып тастауға потенциалдауға болады:

$$2-x=2x-5$$

$$2x+x=5+2$$

$$3x=7$$

$$x=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$$

$x\in ∅ $себебі түбір анықталу облысында жатқан жоқ

Жауабы: $∅$.

**3- мысал.** $\frac{1}{12}lg^{2}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}lgx.$

Шешуі:$ \frac{1}{12}lg^{2}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}lgx$, анықталу облысы: $x>0, x\in \left(0;+\infty \right).$

$lgx=t $жаңа айнымалы енгізсек:

$$\frac{1}{12}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}t ,барлығын 12-ге көбейтеміз$$

$$r^{2}=4-3t;$$

$$r^{2}+3t-4=0$$

$$\left(t+4\right)\left(t-1\right)=0;$$

$\left\{\begin{array}{c}t+4=0,\\t-1=0;\end{array}\right.$ $\rightarrow \left\{\begin{array}{c}t=-4;\\t=1.\end{array}\right.$,

$$\left\{\begin{array}{c}lgx=-4,\\lgx=1;\end{array}\right.\rightarrow \left\{\begin{array}{c}x=10^{-4},\\x=10^{1};\end{array}\right.\rightarrow \left\{\begin{array}{c}x=\frac{1}{10^{4}};\\x=10.\end{array}\right.$$

Жауабы: $\frac{1}{10^{4}};10.$

**4- мысал.** $x^{log\_{2}x-2}=8$

$x^{log\_{2}x}∙x^{-2}=8$ немесе $x^{log\_{2}x}=8x^{2}.$

Шыққан теңдеуді негізін 2-ге тең етіп логарифмдейміз:

$$log\_{2}x∙log\_{2}x=log\_{2}8+log\_{2}x^{2},$$

$$log\_{2}^{2}x=3+2log\_{2}x,$$

$$log\_{2}^{2}x-2log\_{2}x-3=0,$$

$$log\_{2}x=y,$$

$$y^{2}-2y-3=0,$$

$$y\_{1}=3, y\_{2}=-1$$

Демек, $1) log\_{2}x=3$ $2) log\_{2}x=-1$

 $x\_{1}=8.$ $x\_{2}=\frac{1}{2}$

Жауабы: $8;\frac{1}{2}.$

**5- мысал.** $log\_{9}\left(9x\right)∙log\_{x}\sqrt{3}=log\_{\frac{1}{4}}\sqrt{2}$

Анықталу облысы: $\left\{\begin{array}{c}x>0; \\x\ne 1. x\in \left(0;1\right)∪\left(1;+\infty \right).\end{array}\right.$

$$log\_{9}\left(9x\right)∙log\frac{1}{log\_{\sqrt{3}}x}=log\_{2^{-2}}2^{\frac{1}{2}};$$

$$(log\_{9}9+log9\_{x})∙\frac{1}{log\_{3^{\frac{1}{2}}}x}=\left(-\frac{1}{2}\right)∙\frac{1}{2}log\_{2}2;$$

$$\left(1+log\_{3^{2}}x\right)∙\frac{1}{2log\_{3}x}=-\frac{1}{4};$$

$$\frac{1+\frac{1}{2}log\_{3}2}{2log\_{3}x}=-\frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{2log\_{3}x}+\frac{log\_{3}x}{2∙2∙log\_{3}x}=-\frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{2log\_{3}x}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{2log\_{3}x}=-\frac{1}{2};$$

$$log\_{3}x=-1;$$

$$x=3^{-1}=\frac{1}{3.}$$

Жауабы: $\frac{1}{3}.$

**Пайдаланылған әдебиеттер**

1. О.А.Жәутіков, Математиканың даму тарихы, 302-304
2. А.Н.Шыныбеков. Алгебра және анализ бастамалары 11 сынып, Алматы «Атамұра» 2015, 98-100 б.
3. Әбілқасымова А.Е. . Алгебра және анализ бастамалары 11 сынып, Алматы «Мектеп» 2007.