КГУ "Иртышская средняя общеобразовательная школа №1" отдела образования Иртышского района, управления образования Павлодарской области.

Название работы: Извлечение квадратных корней без калькулятора

Дюпин Антон, 9 класс

Секция: прикладная математика

Руководитель проекта: Макауов Азамат Айтбаевич

с.Иртышск, 2022г.

**Оглавление**

|  |  |
| --- | --- |
| Эссе | 3 |
| Введение | 7 |
| Глава 1. Способ разложения на простые множители | 8 |
| Глава 2. Способ использования таблицы квадратов двузначных чисел | 9 |
| Глава 3. Формула Древнего Вавилона | 10 |
| Глава 4. Через решение уравнения | 10 |
| Глава 5. Столбиком | 12 |
| Глава 6. Способ отбрасывания полного квадрата | 13 |
| Глава 7. Метод Ньютона | 14 |
| Глава 8. Канадский метод | 15 |
| Глава 9. Метод подбора угадыванием | 15 |
| Глава 10 . Метод вычетов нечётного числа | 17 |
| Глава 11. Другие методы | 18 |
| Заключение | 21 |
| Список литературы | 22 |
| Приложения | 23 |

Эссе

Моя исследовательская работа заключается в том, чтобы рассказать людям о способе который помогает им в вычислении квадратного корня. И с другой стороны рассказать, что нужно изучить для этого способа. Пояснить в каких случаях его можно применять, если нет калькулятора. В современное время мало кого спросишь, и они тебе ответят. Поэтому мое объяснение должно немного облегчит расчеты. Но я думаю, что оставлю свой выбор на извлечение столбиком. Ведь этот метод способ почти универсален, и при должной сноровке можно вычислять большие числа и с легкостью использовать на работе или в школе. А также нужно знать как решать столбиком, и примерно угадывать и умножать число меньше ста или больше зависит от того насколько число большое из подобранных вами чисел. И чем же здесь уникальность? Да в том, что не многие хотят, чтобы было все так просто, ведь в моих же интересах сделать так, чтобы дети и взрослые научились извлекать корень из числа. Ведь тогда может уйти намного меньше времени на вычисление и потратить его с умом и не писать грамоским и долгим решением. Я сам стараюсь понимать способы облегчения жизни себе, и выигрыванию времени для того что мне нравится. И если все ее выучат, то улучшится скорость выполнения задании в школе и при каких либо действиях с корнями и их извлечением. Я исследовал что, хотел и рассказал о чем, думал. На этом всем спасибо, что читали.

Аннотация

В простейшем случае квадратная таблица помогает извлекать квадратные корни. Достаточно удобный способ извлечь квадратный корень из натурального числа (если, конечно, корень извлекается) — разложить корень числа на простые множители. Понятно, что таблица квадратов очень полезна при извлечении квадратных корней. Однако часто он недоступен. Также часто бывает необходимо извлекать квадратные корни из чисел, которых нет в таблице квадратов. В этих случаях вам необходимо знать один или несколько других методов извлечения квадратных корней. На мой взгляд, простыми и понятными для каждого ученика будут методы, описанные в работе: метод извлечения квадратного корня «Столбиком» и арифметический метод. Экспериментально показано, как вычислять квадратные корни из больших чисел, которых нет в таблице квадратов. Привел вывод и доказательство по теме: извлечение квадратного корня из трехзначного числа в «столбиком». Данная работа поможет учащимся легко извлекать при решении задач по физике, химии и на ЕНТ.

Annotation

In the simplest case, a square table helps to extract square roots. A fairly convenient way to extract the square root of a natural number (if, of course, the root is extracted) is to decompose the root of the number into prime factors. It is clear that the table of squares is very useful in extracting square roots. However, it is often not available. It is also often necessary to extract the square roots of numbers that are not in the table of squares. In these cases, you need to know one or more other square root methods. In my opinion, the methods described in the work will be simple and understandable for each student: the method of extracting the square root "Column" and the arithmetic method. It is experimentally shown how to calculate the square roots of large numbers that are not in the table of squares. He gave a conclusion and proof on the topic: extracting the square root of a three-digit number in a "column".

**Актуальность исследования**  обусловлена стремлением углублять математические знания через применение простейших способов извлечения квадратных корней без калькулятора, распространение алгоритмов извлечения корней среди учащихся, что особенно актуально при сдаче экзаменов, где запрещено пользование калькулятором, а также использовать эти знания при работе с вычислениями корней на уроках математического цикла в ситуациях недоступности калькулятора.

**Цель работы:** изучить все известные способы извлечения квадратных корней без калькулятора и отобрать самые рациональные для практического применения.

**Задачи:**

1. Проанализировать путём соцопроса умение учащихся, преподавателей извлекать квадратные корни без калькулятора.
2. Изучить всю найденную литературу по данному вопросу, научные статьи, исторические справки и работы современных учёных и исследователей.
3. Рассмотреть особенности каждого найденного способа и описать его алгоритм.
4. Показать практическое применение полученных знаний и оценить степень сложности в использовании различных способов и алгоритмов, а также классифицировать их.

**Гипотеза:** Предположим, что существует не менее двух – трёх способов извлечения квадратных корней без калькулятора.

**Объект исследования:** математические символы – квадратные корни.

**Предмет исследования:** особенности способов извлечения квадратных корней без калькулятора.

**Методы исследования:**

1. Анализ опроса по изучаемой теме.
2. Поиск способов и алгоритмов.
3. Сравнение найденных способов и выявление их преимущества и недостатков.
4. Экспериментальное подтверждение правильности разных способов на практике при исследовании путём решения конкретных задач.
5. Анализ полученных данных и разработка своего метода.
6. Проведение научного экспериментального исследования.

**Введение**

Изучение квадратных корней по алгебре в классе и дома часто требовало от меня использования калькулятора. Калькулятор и таблица с квадратами не всегда были под рукой. Уже тогда возник вопрос, что делать в случаях, когда использование калькулятора на экзаменах запрещено. Таблица квадратов целых чисел даже близко не отвечает на такие вопросы, как квадратный корень из 5, 32, 85, 10 816, 180 625 и другие.

Всем известно, что найти квадратный корень без калькулятора — невыполнимая задача. В ситуации, когда для решения задач требуется извлечь квадратный корень, а калькулятор недоступен, в лучшем случае прибегают к методу подбора, пытаясь запомнить данные из таблицы квадратов целых чисел, но это не всегда спасает. Сколько раз каждый был в такой ситуации? Почти все, к кому я обращался с этим вопросом, не знали, как решить эту проблему. (Приложение 1) Но однажды я узнал, что люди научились извлекать корни задолго до изобретения «умных» технологий. Мои вопросы легли в основу исследования, что стало для меня маленьким открытием. Исследуя эту тему, я нашел не один, а несколько способов решения этой проблемы.

***Глава 1. Способ разложения на простые множители***

Чтобы извлечь квадратный корень, вы можете разложить число на простые множители и извлечь квадратный корень из произведения.

Этот метод обычно используется при решении задач с корнями в школе.

3136│2

1568│2

784│2

392│2

196│2

98│2

49│7

7│7

Многие успешно им пользуются, считая его единственным. Извлечение квадратного корня разложение на множители — утомительное занятие, которое к тому же не всегда приводит к желаемому результату. Вы пытаетесь извлечь квадратный корень из числа 524? Разложение на простые множители дает произведение 2∙2∙131. И как продолжить? С этой проблемой сталкиваются все, и вы можете отметить, что остается не извлекаемый корень в ответе. Методом проб и ошибок, отбором, конечно, можно, если вы уверены, что получите приятный ответ, но практика показывает, что задания с полным разложением предлагаются очень редко. Чаще мы видим, что корень полностью извлечь не удается. Поэтому этот способ лишь частично решает проблему извлечения без калькулятора.

***Глава 2.Способ использования таблицы квадратов двузначных чисел***

Метод очень прост в использовании и дает вам квадратный корень из любого целого числа от 1 до 100 до десятых долей мгновенно без калькулятора. Одним из условий этого метода является наличие таблицы с квадратными числами до 99.

Откройте таблицу и проверьте, с какой скоростью вы находите ответ. Но сначала несколько рекомендаций: левый столбец содержит целые числа в ответе, верхний ряд – десятые доли ответа. А дальше все просто: закройте две последние цифры числа в таблице и найдите нужное вам число, не превышающее корневого числа, а затем следуйте правилам этой таблицы.

Давайте посмотрим на пример. Найдем значение √87.

Закрываем две последние цифры у всех чисел в таблице и находим очевидные для

87 - их всего два, 8649 и 8837. А вот 88 - это много.

Так что остается только одно - 8649.

Левая колонка дает ответ 9 (целые числа), а верхняя строка — 3 (десятые доли). Итак, √87 ≈ 9,3. Проверим МК √87 ≈ 9,327379.

Быстро, просто, доступно для тестирования. Но сразу видно, что корни больше 100 этим методом извлечь нельзя. Метод подходит для задач с маленькими корнями и при наличии таблицы.

***Глава 3. Формула Древнего Вавилона***

Древние вавилоняне использовали следующий метод, чтобы найти приблизительное значение квадратного корня из числа x.

Используя эту старую формулу, мы извлекаем квадратный корень из числа 28:

Результат извлечения квадратного корня из 28 с МК 5.2915026.

Как видите, вавилонский метод дает хорошее приближение к точному значению квадратного корня. Но не зная полных квадратов больших чисел и умея быстро их находить, найти результат извлечения будет крайне сложно.

Древние вавилоняне использовали следующий метод, чтобы найти приблизительное значение квадратного корня из числа x.

***Глава 4. Через решение уравнения***

На самом деле есть удобный способ найти квадратный корень **"вручную"** путем решения уравнения, ведь математика - наука с многовековой историей и калькуляторы существовали не всегда. С помощью этого метода можно вычислить значение квадратного корня с точностью до одного-двух знаков после запятой, а при желании добиться еще большей точности. Звучит невероятно, но попробуйте этот метод при вычислении квадратного корня. В чем суть, давайте рассмотрим пример и попробуем вычислить значение квадратного корня из 17. Сначала мы определяем границы искомого корня в целых числах. Нетрудно догадаться, что это числа 16 = 4² и 25 = 5², поэтому и .

Пусть x - разность, на которую отличаются  **и** ,

Следовательно  **= 4 +  *х***. Возводим в квадрат обе части полученного уравнения (**) ² = (4 +  *х****)***²** и раскрываем скобки с формулой суммы квадратов:

**17 = (4 + *х*)² = 16 + 8*х* + *х*².**

Поскольку мы ожидаем, что результат будет точным до десятых или сотых долей, а x², очевидно, является довольно маленькой дробью, им можно полностью пренебречь.

В результате получаем простое линейное уравнение **17 = 16 + 8*х.***

Решая ее, получаем значение: ***х* =** **0,125.**  Итак,  **≈ 4 + 0,125 ≈ 4,125 .**

На самом деле при подсчете на калькуляторе значение этого корня равно 4,1231056, т.е. погрешность нашего расчета составила 0,0018944, что меньше двух тысячных. Не правда ли, приличная точность!

Но если решение математических задач все же требует еще большей точности, то ее можно добиться точно таким же путем, просто продолжив вычисления с уже полученным значением квадратного корня. Итак, продолжим:

Снова пренебрегаем мелкой дробью и решаем линейное уравнение:

Итак, ,  
а погрешность была всего 0,0000008. Итак, этот способ вычисления квадратного корня чрезвычайно точен и удобен, а погрешность вычисления полностью зависит от вашего терпения и усидчивости.

Но даже этот способ требует терпения и умения решать уравнения с формулами сокращённого умножения.

***Глава 5. Столбиком***

Будем работать с по плану: Пусть = x

1. Разделите число (5963364) на пары справа налево (5`96`33`64)
2. Берем квадратный корень из первой группыслева (— это число 2).

Это дает нам первую цифру x.

3. Найдите квадрат первого числа(22 = 4).

4. Найдите разницу между первой группой и квадратом первой цифры (5 - 4 = 1).

5. Сносим следующие две цифры (у нас число 196).

6. Удвойте первую найденную цифру, запишите ее слеваза чертой (2∙2 = 4).

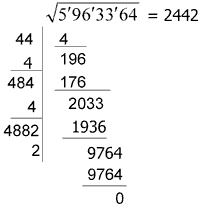
***7.*** Теперь нужно найти вторую цифру числа х: найденная нами удвоенная первая цифра становится цифрой десятков числа, при умножении на количество единиц нужно получить число меньше 196 (это число 4 и 44∙4=176). 4 — вторая цифра числа х.

8. Найдите разницу (196 - 176 = 20).

9. Сносим следующую группу (получаем число 2033).

10. Удваиваем число 24, получаем 48.

11. В числе 48 десятков число при умножении на количество единиц должно быть меньше 2033 (484∙4=1936). Единицы, которые мы нашли (4), — это третья цифра числа x. Затем процесс повторяется.



Способ почти универсальный, так как применим к любым числам, но составление ребуса (угадывание цифры на конце числа) требует логики и хороших вычислительных навыков столбиком. Он трудоёмкий, но очень точный.

***Глава 6. Способ отбрасывания полного квадрата***

( только у четырехзначных чисел)

Сразу следует уточнить, что этот способ применим только для извлечения квадратного корня из точного квадрата, а алгоритм поиска зависит от значения подкоренного числа.

1. Извлечение квадратного корня из числа 752 = 5625

Например: = + 144 = 37 + 25 = 62.

Представляем число 3844 в виде суммы, из этого числа выбираем квадрат 144, затем отбрасываем выбранный квадрат, к сотням первого слагаемого (37) всегда прибавляем 25 и получаем ответ 62.

Таким образом, вы можете извлекать квадратные корни только до 752 =5625!

2) Извлечение корней после числа 752 = 5625

Как устно извлечь квадратные корни из чисел больше 752 =5625?

Например: = + 225 = 70 + = 70 + 15 = 85.

Чтобы 7225 представлено как сумма 7000 и выделенного квадрата 225. Затем добавьте квадратный корень из 225, что равно 15, к числу сотен.

Получим ответ 85.

Этот способ нахождения очень интересен и отчасти оригинален, но в ходе своих исследований я столкнулся с ним только один раз у пермского учителя. Возможно, он мало изучен или имеет некоторые исключения.

Его довольно сложно запомнить из-за двойственности алгоритма, и он применим только для 4-значных точных корней, но я проработал множество примеров и убедился, что это правильно. Кроме того, этот способ доступен тем, кто уже запомнил квадраты чисел от 11 до 29, так как без их ведома он бесполезен.

***Глава 7. Метод Ньютона***

Этот метод извлечения квадратного корня без использования калькулятора был разработан Исааком Ньютоном, но открыт еще раньше (около 100 г. н.э.) одним из древних математиков Героном Александрийским.

Этот метод (известный как метод Ньютона) заключается в следующем:

Пусть ***а1***— будет первым приближением числа  (в качестве ***а1*** можно взять значения квадратного корня из натурального числа, являющегося точным квадратом, не превосходящим x*) .*

Следующее, более точное приближение ***а2***числа можно найти по формуле.

Третье, еще более точное приближение

и так далее с произвольной точностью

(n+1) - е приближение можно найти по формуле:

.

Нахождение приближенного значения числаметодом Ньютона дает следующие результаты: а1 = 1,4; а2 = 1,41; а3 = 1,415.

Метод Герона позволяет извлекать квадратный корень из большого числа с любой точностью, но имеет существенный недостаток: громоздкость вычислений.

***Глава 8. Канадский метод***

Этот быстрый метод был открыт в 20 веке молодыми учеными одного из ведущих университетов Канады. Его точность составляет не более двух-трех знаков после запятой. Вот их формула:

где X - число, из которого нужно извлечь квадратный корень, а S - число ближайшего полного квадрата.

Попробуем извлечь квадратный корень из 75

X = 75, S = 81. Это означает, что = 9.

Рассчитаем по этой формуле :   
 9 + = 9 – 0,333 = 8,667

Внимательно изучив этот метод, легко доказать его сходство с вавилонским и аргументировать авторские права на изобретение этой формулы, если таковые имеются в действительности. Метод прост и удобен.

***Глава 9. Метод подбора угадыванием***

Этот метод был предложен английскими студентами из Лондонского колледжа математики, но каждый в своей жизни по незнанию хотя бы раз использовал этот метод. Он основан на подборе разных значений квадратов узких чисел путем сужения диапазона поиска. Этот способ может освоить любой, но пользоваться им вряд ли получится, так как он требует многократного вычисления произведения столбца чисел, которые не всегда правильно угадываются. Этот способ проигрывает и по красоте решения, и по времени. Алгоритм прост:

Предположим, вы хотите извлечь квадратный корень из 75.

Поскольку 82 = 64 и 92 = 81, вы знаете, что ответ находится где-то посередине.

Попробуйте повысить 8,52 и вы получите 72,25 (минимум)

Теперь попробуйте 8,62 и вы получите 73,96 ((слишком мало, но близко)

Теперь попробуйте 8,72 и вы получите 75,69 (слишком много)

Теперь вы знаете, что ответ находится между 8,6 и 8,7

Попробуйте 8,652 и вы получите 74,8225 (мало)

Теперь 8,662 ... и так далее.

Продолжайте, пока не получите ответ, достаточно конкретный для вас.

Аналогичное решение предлагает А. Г. Мордкович при введении символа квадратного корня, называя его методом уточнения, но сам он предлагает угадывание, называя его угадыванием поиска «хвоста» при попадании в «яблочко».

Этот метод был предложен английскими студентами из Лондонского колледжа математики, но каждый в своей жизни по незнанию хотя бы раз использовал этот метод. Он основан на подборе разных значений квадратов узких чисел путем сужения диапазона поиска. Этот способ может освоить любой, но пользоваться им вряд ли получится, так как он требует многократного вычисления произведения столбца чисел, которые не всегда правильно угадываются. Этот способ проигрывает и по красоте решения, и по времени. Алгоритм прост:

Предположим, вы хотите извлечь квадратный корень из 75.

Поскольку 82 = 64 и 92 = 81, вы знаете, что ответ находится где-то посередине.

Попробуйте повысить 8,52, и вы получите 72,25 (минимум).

Теперь попробуйте 8,62, и вы получите 73,96 (слишком мало, но близко).

Теперь попробуйте 8,72, и вы получите 75,69 (слишком много).

Теперь вы знаете, что ответ находится между 8,6 и 8,7.

Попробуйте поднять 8,652, и вы получите 74,8225 (мало).

Теперь попробуйте 8662... и так далее.

Продолжайте, пока не получите ответ, достаточно конкретный для вас.

Аналогичное решение предлагает А. Г. Мордкович при введении символа квадратного корня, называя его методом уточнения, но сам он предлагает угадывание, называя его угадыванием поиска «хвостика» при попадании в «яблочко».

***Глава 10.******Метод вычетов нечётного числа***

Этот метод предлагает своим ученикам миссис Бруксбэнк, учитель математики в одной из вашингтонских школ. Он состоит из последовательного вычитания нечетных чисел 1,3,5,7 и т. д. до получения нуля, после чего подсчитывается количество вычитаний. Это будет ответ.

Например, чтобы получить квадратный корень из 169 это:

169 - 1 = 168 - 3 = 165 - 5 =160 - 7 =153 - 9 = 144 - 11 = 133 – 13 =120-15 = 105 – 17=88 – 19 =69 – 21 = 48 – 23= 25 – 25 = 0

Общее количество вычитаний равно 13, поэтому квадратный корень из 169 равен 13.

Ученые называют этот метод арифметическим извлечением квадратного корня и за глаза «методом черепахи» из-за его медлительности.

Недостаток этого метода в том, что если извлеченный корень не является целым числом, можно узнать только его целую часть, но не точнее. В то же время этот метод вполне доступен для детей, решающих простейшие математические задачи, требующие извлечения квадратного корня. Попробуйте таким образом извлечь квадратный корень из числа, например 5963364, и вы обнаружите, что он «работает», конечно, без ошибок для точных корней, но в течение очень, очень долгого времени в решении.

***Глава 11. Другие методы***

В ходе моего исследования я отыскал ещё несколько способов решения моей проблемы. Числа, извлекающие из квадратного корня от 1 до 10000 можно вычислить логически рассуждая.

Например, рассмотрим число которое извлекается из знака квадратного корня

данное число находится между числами

значит, это число находится между числами как 90 и 100. Значит, мы должны посмотреть на последнюю цифру она оканчивается, на 9 значит, квадратный корень данного числа будет оканчиваться на 3 или 7, так как .

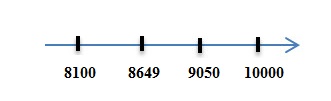
Определим, какое число должно быть, мы знаем, что это число 93 или 97. А как же определить какое же именно должен быть это число? Для этого определим, к какому числу ближе или к 8100 или к 10000. Построим координатную прямую, на ней отметим числа 8100, 8649, 10000. Если в промежутке от числа 8100 до 10000 данное число относительно середины будет ближе к 8100 то, будет 93, если ближе к 10000 то 97.

То есть определим середину:

10000-8100=1900

1900:2=950

8100+950=9050



По координатной прямой мы видим, что наше число ближе к 8100, то есть

Можно также воспользоваться свойством, что число оканчивающая на 5 при нахождении его квадрата вычисляется так:

Например возьмем число вычислим его:

1. Найдем промежутки где находится данное число:

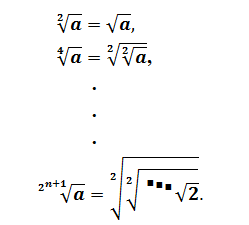
1. Определим на какое число оканчивается . В конце число 9 значит может быть либо 3 либо 7 так как . То есть число может быть 33 или 37.
2. Воспользуемся свойством и найдем 352. Так как

значит наше число 37.

Исследовая данную тему мы понимаем, что можем также вычислить корень четвертой степени, восьмой и т.д.

Так как есть формула:

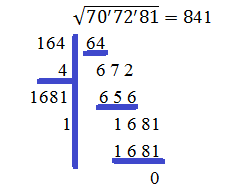
В данном случае:

****

Например найдем

Воспользуемся формулой, т.е.

Теперь найдем с помощью столбика



Затем вычисляем аналогично т.е. осталось вычислить или воспользоваться таблицей квадратов.

Получилось что

**Заключение**

В ходе данного исследования в подготовительный период был проведен анализ ответов на степень умения извлекать квадратные корни без калькулятора, который показал практически полную безграмотность взрослых и детей в этом вопросе, что «подогрело повысить интерес к изучаемому предмету и убедиться в правильности гипотезы. В ходе работы уточнялась степень изученности данного вопроса в научных статьях, педагогической литературе, работах студентов и школьников, молодежных образовательных форумах, что привело к поиску не одного, а нескольких способов извлечения квадратных корней. В результате исследования выяснилось, что современной науке известно немало таких методов. Все найденные методы были рассмотрены, описаны и проверены на практике. По результатам этого исследования доказано, что науке известно несколько способов извлечения квадратного корня без калькулятора. Все методы имеют разные алгоритмы и степень сложности расчетов, но ни один из них не входит в школьный курс, так как относится к разделу высшей или прикладной математики. В ходе исследования были отработаны все методы и их практическое применение выявило все недостатки и преимущества каждого метода. Каждая процедура характеризовалась по таким критериям, как вычислительная точность, трудоемкость, «Требует знания формул», «Для каких корней применима», «Требует логики или дополнительных знаний», а также насколько удобна, математически красива и практична процедура. является.

В ходе работы на практике выяснилось, что извлечение квадратного корня без калькулятора не только полезно и актуально, но и очень увлекательно.

**Список литература:**

1. Д.А. Шыныбеков, А.Н. Шыныбеков, Р.Н. Жумабаев. Алгебра 8 класс, Алматы, Атамұра, 2018г.
2. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: Алгебра: Геометрия: Прил.: Справ.материалы: Учебное пособие для учащихся.-М.:Просвещение, 1986.-271 с.:ил.
3. Мельникова Н.Б., Лудина Г.Б., Лепихова Н.М. Геометрия.Задачник-практикум для 9 класса.(к учебнику А.В. Погорелова), М.: Интеллект-Центр. 2005-128 с.
4. Пичугин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7- 9 классов средней школы. – Москва, Просвещение, 1990 г.
5. Ткачева М.В. Домашняя математика. Книга для учащихся 8 класса учебных заведений. – Москва, Просвещение, 1994г.
6. Жохов В.И., Погодин В.Н. Справочные таблицы по математике.-М.: ООО «Издательство «РОСМЭН-ПРЕСС», 2004.-120 с.

**Приложение 1**

Результаты экспресс - опроса учащихся, учителей (май 2022г), в %

Всем участникам опроса был предложен один вопрос:

**Знаете ли Вы способ извлечения квадратного корня без калькулятора?**

В опросе приняли участие учителя (5 человек), учащиеся (20 человек).

Из 25 участников экспресс – опроса только один ответил «да».

Вывод: Результаты показали почти полную безграмотность в этом вопросе не только школьников, но и взрослых.